

## Guía de Lógica Matemática

### Indicador:

- ✓ Reconocer y aplicar los conectores lógicos en distintas proposiciones formuladas.
- ✓ Resolver a través de tablas de verdad la verosimilitud de distintas proposiciones.
- ✓ Resolver desafíos que involucren los contenidos de lógica en su resolución.

### LOGICA MATEMATICA.

#### I.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

##### I.1.- DEFINICION.

La Lógica Matemática es una RAMA más de LAS MATEMATICAS como lo son, por ejemplo, La Aritmética, El Algebra, La Geometría, etc.; con sus elementos propios de trabajo, con sus operaciones particulares bien definidas y que solo son válidas en su contexto y con sus problemas específicos y que es lo que en conjunto caracteriza a cada una de ellas.

##### I.2.- ELEMENTOS DE TRABAJO.

Los elementos de trabajo de La Lógica Matemáticas, es decir, *los entes matemáticos con los cuales y sobre los cuales va a operar* son las PROPOSICIONES. Las proposiciones son a la Lógica Matemática lo que los Naturales son a la Aritmética; los Racionales al Algebra; las Funciones al Cálculo, etc. y, al igual que en estos casos, las proposiciones tienen su definición, que es:

#### PROPOSICIONES:

*Una Proposición es un enunciado que puede ser Falso (F) o verdadero (V)  
pero NO ambas cosas a la vez o ninguna de ellas en forma simultánea.*

En general las proposiciones se indican mediante las letras minúsculas a partir de la "p", por ejemplo:

p: El 4 es un número PAR.

q: El 15 es un número PRIMO.

r: El 56 NO es divisible entre 3.

Dado que la disponibilidad de "letras" a partir de la "p" es limitada, entonces se utilizan los subíndices en cada una de ellas para ampliar nuestra disponibilidad de elementos. Por ejemplo:

p<sub>1</sub>: Son las 7 de la tarde.

p<sub>2</sub>: Esta clase es de FISICA.

p<sub>3</sub>: Un polinomio es derivable en todos los reales.

p<sub>4</sub>: El número  $\pi$  es irracional.

p<sub>5</sub>: Si un número es PAR entonces es divisible entre DOS.

p<sub>6</sub>: La suma de los ángulos internos de un triángulo NO es igual a DOS rectos.

#### EJERCICIOS No. 1.

Valida las siguientes Proposiciones.

- p<sub>1</sub>: Todo polinomio de Grado 2 tiene solución en los reales.
- p<sub>2</sub>: Toda ecuación lineal tiene solución en los racionales.
- p<sub>3</sub>: Toda ecuación lineal tiene solución en los naturales.
- p<sub>4</sub>: Un polinomio es lineal si el grado mayor es 1.
- p<sub>5</sub>: Los polinomios aceptan exponentes fraccionarios.
- p<sub>6</sub>: El número 9 NO es PAR NI es PRIMO.
- p<sub>7</sub>: El cinco es un número PRIMO.
- p<sub>8</sub>: El 4 es divisor del 50.
- p<sub>9</sub>:  $6x - 10 = 0$  NO tiene solución en los enteros.

#### I.3.- OPERACIONES DE LA LOGICA MATEMATICA.

Continuando con nuestro esquema definiremos ahora las operaciones permitidas en la Lógica Matemática. También en este caso son DOS las Operaciones básicas y con las cuales haremos todo lo permitido en esta rama de las matemáticas. Tales operaciones son: LA CONJUNCION Y LA DISYUNCION. Sin embargo, antes de definir las es necesario definir lo que se conoce como:

#### OPERACION BINARIA.

*Una Operación Binaria es una Regla de Correspondencia*

*mediante la cual a cada par ordenado de un conjunto  $A \times A$   
le corresponde uno y solo un elemento del mismo conjunto A.*

Según la definición anterior, una Operación Binaria se define para los elementos de un Conjunto A y solamente será válida para ellos. Así a cada Par de elementos del Conjunto le corresponderá UNO y SOLO UN elemento del mismo conjunto. Es lo que se llama una Operación Cerrada. Viene a ser una función que tiene como dominio al producto cartesiano  $A \times A$  y como codominio al conjunto A. Es decir:

$$f : A \times A \rightarrow A$$

#### Ejemplos:

p<sub>1</sub>: La suma NO es cerrada en el conjunto de los Impares.

La suma de DOS impares nos da un número que es PAR.

p<sub>2</sub>: El producto es cerrado en los impares.

El producto de DOS impares siempre es un impar.

p<sub>3</sub>: El producto NO es cerrado en los primos.

De acuerdo con lo anterior, SI una operación binaria se define entre DOS elementos del conjunto y por definición es cerrada, entonces, cada una de las operaciones de la Lógica Matemática nos dará como resultado OTRA proposición la que de acuerdo con su definición también podrá ser F o V; a partir de tal condición se definen tales operaciones en los siguientes términos:

#### DISYUNCION.

*La Disyunción es una Operación Binaria de la Lógica Matemática*

*definida entre DOS proposiciones y que da como resultado otra  
proposición que será VERDADERA si al menos una de las  
proposiciones operadas es verdadera, en caso contrario, es FALSA.*

**Análisis de la Definición:**

- 1.- Una definición se DA y se acepta COMO válida ya que de inicio es una de las REGLAS con las que se va a trabajar en cada rama de la matemática. Lo que se le pide a la definición es que NO se contradiga con el cuerpo de conocimientos aceptados y demostrados como válidos que conforman a la matemática como metaciencia.
- 2.- Se define entre DOS proposiciones " p " y " q " .
- 3.- Se represente mediante el símbolo "  $\vee$  " y se lee como " o ". Así:  $p \vee q$ ; se lee como: " p o q " .
- 4.- El resultado es OTRA proposición, característica heredada por ser una Operación Binaria.
- 5.- Siendo el resultado de una disyunción otra proposición, por definición esta puede ser F o V.
- 6.- Así esta Operación se define a partir de validar la proposición resultante.
- 7.- La que es F si ambas " p y q " son F simultáneamente.
- 8.- Finalmente, con todas las combinaciones que podamos obtener con los valores de verdad de las proposiciones operadas se construye una tabla de verdad la que nos define esquemáticamente ésta operación en la forma siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**CONJUNCION.**

*La Conjunción es una Operación Binaria de la Lógica Matemática*

*definida entre DOS proposiciones y que da como resultado otra proposición que será VERDADERA si y solo sí las proposiciones operadas son verdaderas simultáneamente.*

**Análisis de la Definición:**

- 1.- Nuevamente esta definición se DA y se acepta COMO válida de acuerdo a lo aclarado en el punto 1 del análisis para la disyunción.
- 2.- Se define entre DOS proposiciones " p " y " q " .
- 3.- Se represente mediante el símbolo "  $\wedge$  " y se lee como " y ". Así:  $p \wedge q$ ; se lee como: " p y q " .
- 4.- El resultado es OTRA proposición, característica heredada por ser una Operación Binaria.
- 5.- Siendo el resultado de una conjunción otra proposición, por definición esta puede ser F o V.
- 6.- Así, esta Operación se define a partir de validar la proposición resultante.
- 7.- La que es V si ambas " p y q " son V simultáneamente en caso contrario es F.
- 8.- Finalmente, también en este caso podemos construir una tabla de verdad la que nos define esquemáticamente ésta operación en la forma siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Junto con esta DOS operaciones Binarias, se define otra operación que se aplica sobre una sola proposición, es decir, NO es una operación binaria. Tal operación es la NEGACION la que se define en los términos siguientes:

**NEGACION**

*La negación de una proposición " p " dada, es otra proposición*

*que será V si la proposición operada es F y viceversa, es F si la original es V. Esta operación se representa mediante el símbolo "  $\sim$  " y se lee como " No " .*

La correspondiente tabla de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

- $p_1 \wedge p_1$ : La suma es cerrada en los pares y la suma es cerrada en los pares. ( V ).
  - $p_1 \vee \sim p_2$ : La suma es cerrada en los pares o el producto NO es cerrado en los impares. ( V )
  - $p_2 \wedge \sim p_2$ : El producto es cerrado en los impares y el producto no es cerrado en los impares. ( F ).
- EJERCICIOS No. 2:**  
Con las proposiciones del ejercicio 1.C efectúe las siguientes operaciones. Valídelas.
- a).-  $\sim p_2 \wedge p_3$  :
  - b).-  $p_1 \vee \sim p_4$  :
  - c).-  $p_6 \wedge p_5$  :
  - d).-  $\sim p_3 \vee p_7$  :
  - e).-  $\sim p_5 \wedge \sim p_5$  :
  - f).-  $p_8 \vee p_6$  :
  - g).-  $p_7 \wedge p_1$  :
  - h).-  $p_6 \vee \sim p_7$  :
  - i).-  $\sim p_4 \wedge p_9$  :
  - j).-  $p_7 \vee \sim p_5$  :

**Ejemplos:**

Efectúe las operaciones indicadas con las siguientes proposiciones. Valídelas.

- $p_1$ : La suma es cerrada en los pares.
- $p_2$ : El producto es cerrado en los impares.
- $p_1 \vee p_2$ : La suma es cerrada en los pares o el producto es cerrado en los impares. ( V )
- $p_1 \wedge p_2$ : La suma es cerrada en los pares y el producto es cerrado en los impares. ( V ).
- $\sim p_1 \wedge p_2$ : La suma NO es cerrada en los pares y el producto es cerrado en los impares. ( F )
- $\sim p_1 \vee \sim p_2$ : La suma NO es cerrada en los pares o el producto NO es cerrado en los impares. ( F ).

**I.4.- PROBLEMAS DE LA LOGICA MATEMATICA.**

Los problemas de la Lógica Matemática, en una primera instancia, son los RAZONAMIENTOS en su más pura acepción. Es decir, no como un proceso simple de evocación o de recuerdo, sino como un proceso BIEN estructurado, formado por proposiciones en el que el resultado final debe ser algo útil para que tenga sentido.

Es de todos sabido, y alguna vez hemos hecho uso de tal recurso, que cuando queremos desacreditar o rechazar algo, el recurso inmediato es decir que ese algo "NO TIENE LOGICA". Lo que esto significa, desde el punto de vista lógico, es que ese algo que estamos rechazando no puede soportar un proceso riguroso de análisis lógico, hecho a partir y con los conocimientos que asumimos todos poseemos.

En todo caso, aceptar o rechazar el conocimiento que continuamente nos está llegando y ante el cual forzosamente tenemos que reaccionar implica necesariamente un proceso de análisis lógico muy minucioso. Solamente así estaremos en posibilidad de rechazar o aceptar como verdadero tal conocimiento. Finalmente casi siempre tal conocimiento está expresado mediante una proposición.

Por otro lado, puesto que la verdad NO es absoluta y menos la cotidiana, ya que su valor se encuentra contaminado de alguna forma por el contexto particular de cada individuo, aceptar o rechazar los conocimientos como verdaderos muchas veces llega a ser una cuestión personal en la que los aspectos subjetivos son determinantes.

Finalmente, y de acuerdo con los estudios de la construcción del conocimiento como el filósofo Kant, solamente las verdades que se extraen mediante las matemáticas son absolutas, por lo tanto, y como el título lo indica, los conocimientos de nuestro interés y los que finalmente modelaremos serán única y exclusivamente los conocimientos matemáticos. Es decir, solamente proposiciones que involucren conocimiento de las matemáticas serán los que estudiaremos y eventualmente validaremos.

Ahora bien, ¿Cómo saber si un razonamiento es correcto?. Dado que el resultado de un razonamiento va a estar expresado mediante una proposición y esta proposición va a ser factible de expresar mediante las operaciones lógicas, entonces, si la tabla de verdad asociada a la operación es correcta, el razonamiento también lo será desde el punto de vista de la lógica.

#### ¡ATENCIÓN!

Todo conocimiento, como resultado de un razonamiento, debe ser expresable mediante las operaciones de la lógica matemática.

Es decir, toda expresión de la lógica matemática que involucre proposiciones, conjunciones, disyunciones y/o negaciones representa un razonamiento y, como ya lo hemos mencionado, la validación de tales operaciones se realiza mediante la correspondiente tabla de verdad, por lo tanto:

#### UN RAZONAMIENTO:

- Será VERDADERO si su tabla de verdad lo es también independientemente de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones involucradas en él.  
(Razonamiento Tautológico o Tautología).
- Será FALSO si su tabla de verdad lo es también, independientemente de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones involucradas en él.  
(Razonamiento Contradictorio o Absurdo).
- Ahora que si su valor de verdad depende de los valores de las proposiciones involucradas, se dice que el razonamiento es Contingente.

Por lo anteriormente dicho solamente los razonamientos tautológicos serán de nuestro interés.

Pero: ¿Cómo podemos modelar un razonamiento?.

Para lograr lo anterior es necesario identificar, en primera instancia, el razonamiento MAS elemental que pueda existir. Esto significa algo así como identificar el razonamiento mínimo posible que se pueda dar. Tal razonamiento mínimo es la INFERENCIA MATERIAL llamada también simplemente inferencia lógica, la cual se define como:

#### INFERENCIA MATERIAL.

Es la forma más elemental que adopta un Razonamiento en la Lógica Matemática. Se define entre DOS proposiciones: Una, la primera, llamada Antecedente o Hipótesis y otra, la segunda, Consecuente o Tesis. Dado que es la conexión entre DOS proposiciones entonces nos da como resultado otra proposición que será V si ambas son V o si el Antecedente es F independientemente del Consecuente. Se representa mediante el símbolo " $\rightarrow$ " y se lee: "Si...Entonces..." así en la inferencia " $p \rightarrow q$ " la leemos: Si p entonces q.

De acuerdo con la definición anterior, tendremos la siguiente Tabla de Verdad que nos permite validar una Inferencia.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:

Con las siguientes proposiciones construya las Inferencias que se piden. Valídelas.

p: 4 y 10 son números pares.

q: 4 + 10 es un número Par.

a).-  $p \rightarrow q$ : Si 4 y 10 son Pares, entonces 4 + 10 es Par. (  $A = V$  y  $C = V \therefore \rightarrow V$  )

b).-  $\sim p \rightarrow q$ : Si 4 y 10 NO son pares entonces 4 + 10 es Par. (  $A = F$  y  $C = V \therefore \rightarrow V$  )

c).-  $p \rightarrow \sim q$ : Si 4 y 10 son pares entonces 4 + 10 NO es par. (  $A = V$  y  $C = F \therefore \rightarrow F$  )

d).-  $\sim p \rightarrow \sim q$ : Si 4 y 10 NO son pares entonces 4 + 10 NO es par. (  $A = F$  y  $C = F \therefore \rightarrow V$  )

e).-  $q \rightarrow p$ : Si 4 + 10 es PAR entonces 4 y 10 son pares. (  $A = V$  y  $C = V \therefore \rightarrow V$  )

f).-  $q \rightarrow \sim p$ : Si 4 + 10 es PAR entonces 4 y 10 NO son pares. (  $A = V$  y  $C = F \therefore \rightarrow F$  ).

g).-  $\sim q \rightarrow p$ : Si 4 + 10 NO es par entonces 4 y 10 son pares. (  $A = F$  y  $C = V \therefore \rightarrow V$  ).

h).-  $\sim q \rightarrow \sim p$ : Si 4 + 10 NO es par entonces 4 y 10 NO son pares. (  $A = F$  y  $C = F \therefore \rightarrow V$  )

#### EJERCICIOS No. 3.

Con las siguientes proposiciones construya las Inferencias que se piden. Valídelas.

p: 5 y 9 son números impares.

q: 5 x 9 es un número impar.

a).-  $p \rightarrow q$ :

b).-  $\sim p \rightarrow q$ :

c).-  $p \rightarrow \sim q$ :

d).-  $\sim p \rightarrow \sim q$ :

e).-  $q \rightarrow p$ :

f).-  $q \rightarrow \sim p$ :

g).-  $\sim q \rightarrow p$ :

h).-  $\sim q \rightarrow \sim p$ :

#### DEFINICION:

*Dos expresiones de la Lógica Matemática son equivalentes y representan el mismo razonamiento si tiene la misma tabla de verdad. Es decir, si para la misma combinación de valores de verdad de las proposiciones involucradas el resultado tiene también el mismo valor de verdad.*

La definición anterior nos permite obtener el Modelo Matemático de la Inferencia Lógica. Sin entrara en detalles diremos que tal Modelo está dado por la expresión:

$$\sim p \vee q$$

Si empleamos las definiciones que hemos dado para obtener la Tabla de Verdad de esta expresión veremos que es idéntica a la de la Inferencia Lógica, por lo tanto, ambas son equivalentes por lo que la Inferencia la podemos expresar, para efectos de análisis mediante esta ecuación.

EJERCICIOS No. 4.

Obteniendo la Tabla de Verdad verifique la identidad entre la Inferencia Lógica y la Ecuación anterior.

Ahora sí ya estamos en posibilidad de Modelar Razonamientos. Sin embargo: ¿Cómo podemos traducir un razonamiento a una Ecuación de la Lógica?. Esto lo veremos en el punto siguiente.

#### I.5.- LA LOGICA DE LA DEMOSTRACION.

La Lógica de la Demostración es una de las pocas ramas de las Matemáticas que han trascendido a través del desarrollo de la humanidad y tiene como objetivo:

*CONFERIRLE A LOS CONOCIMIENTOS  
MATEMATICOS LA CATEGORIA DE VERDADES  
ABSOLUTAS EN SU PARTICULAR CONTEXTO.*

Esto significa que todo conocimiento matemático que se desarrolla y por consecuencia se enuncia como nuevo a medida que la ciencia avanza, forzosamente debe caber en el paquete cognoscitivo que en su momento es aceptado como tal y debe avenirse a las reglas del juego que en su momento están establecidas. Cuando no se da este caso, casi siempre la lucha para que tal conocimiento se preserve a sido a costa de la propia vida de los impulsores.

Entonces, cuando un nuevo conocimiento es enunciado, la inercia a aceptarlo es elevada y, en primera instancia, se busca desacreditarlo mediante lo que vendría a ser El Primer Método de Demostración que es:

*EL CONTRAEJEMPLO  
Consiste básica en presentar un ejemplo que niegue la  
aseveración que el conocimiento está enunciando.*

Análisis del Método:

1.- Estrictamente hablando este Método no es un Método para demostrar que ALGO es verdadero, sino para evidenciar que ese ALGO es falso mediante el fácil recurso de dar un ejemplo que invalida el conocimiento, de ahí su nombre de Contraejemplo.

EJEMPLO:

p<sub>1</sub>: Todos los peces son ovíparos.

p<sub>2</sub>: Todos los seres humanos tiene DOS brazos.

p<sub>3</sub>: Toda función continua es derivable.

p<sub>4</sub>: Todo cuerpo que se deje a la libre acción de la gravedad tiende a caer.

La forma más acabada, en el sentido de la perfección, de un razonamiento es el que se da en la Demostración de un enunciado matemático. Demostrar que una proposición que encierra un conocimiento matemático es verdadera, será en primera instancia, el punto de nuestro interés. Es decir, nuestro trabajo será efectuar una demostración y verificar que el razonamiento involucrado es lógicamente correcto. De acuerdo con los estudiosos del Tema, demostrar que una proposición es VERDADERA es la principal actividad del Lógico.

Una vez que el enunciado a superado la prueba continua de los Contraejemplos, es decir, una vez que tal enunciado "tiene visos de ser verdadero", entonces viene el proceso de Demostración. Así, dependiendo del enunciado en particular se empleará el Método de Demostración más adecuado, sin embargo, el término adecuado en ocasiones implica que ninguno otro Método es aplicable por las características intrínsecas del enunciado mismo.

El Método por excelencia de la demostración matemática es:

*METODO DIRECTO  
Parte del consecuente o Hipótesis y empleado definiciones,  
propiedades y/o conocimientos previamente demostrados, a  
partir de ella, formamos una cadena de Inferencias Lógicas  
la quede manera natural nos lleva a la Tesis.*

Análisis del Método.

1.- Es el Método de Demostración por excelencia de la Matemática.

2.- Se dice que es un método constructivista, ya que el conocimiento se construye mediante la demostración.

3.- Nos lleva directamente de la Hipótesis a la Tesis.

4.- La Hipótesis siempre es verdadera.

5.- A partir de ella se deriva una proposición cuya veracidad debe demostrarse.

6.- La proposición final siempre es la Tesis.

7.- El razonamiento es una Tautología. Es decir, su Tabla de Verdad siempre es Verdadera independientemente de los valores que adopten las proposiciones.

8.- El Método se plantea según se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} p &: \text{ (Hipótesis)} \\ p \rightarrow p_1 &: \text{ (Obtenida de } p) \\ p_1 \rightarrow p_2 &: \text{ (Obtenida de } p_1) \\ p_2 \rightarrow p_3 &: \text{ (Obtenida de } p_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$p_n \rightarrow q$ : (Obtenida de  $p_n$ )

$q$  (Tesis).

9).- El Método se lee según se muestra enseguida:

$[ p \wedge ( p \rightarrow p_1 ) \wedge ( p_1 \rightarrow p_2 ) \wedge ( p_2 \rightarrow p_3 ) \wedge \dots \wedge ( p_n \rightarrow q ) ] \rightarrow q$

10).- De acuerdo con nuestra definición la Ecuación correspondiente es:

$\sim [ p \wedge ( \sim p \vee p_1 ) \wedge ( \sim p_1 \vee p_2 ) \wedge ( \sim p_2 \vee p_3 ) \wedge \dots \wedge ( \sim p_n \vee q ) ] \vee q$

EJEMPLOS Y EJERCICIOS.-

a).- Utilizando el Método Directo de demostración, demuestre las siguientes proposiciones:

$p_1$ : La suma de dos números pares es un número par.

b).- Muestre que el razonamiento utilizado en el Método Directo es una tautología.

Como ya mencionamos, el método directo es el método por excelencia de la demostración matemática, ya que nos lleva directamente de la Hipótesis a la Tesis, sin embargo este método no siempre es aplicable, ya que en muchos casos la hipótesis se resiste a proporcionarnos la información necesaria para construir la demostración de ahí la importancia del segundo método que viene a ser él:

$p_2$ : La suma de dos números impares es un número par.

$p_3$ : El producto de dos números pares es un número par.

$p_4$ : El producto de dos números impares es impar.

#### METODO INDIRECTO.

*Este Método es semejante al Método Directo con la variante de que la Tesis negada se convierte en Hipótesis y esta negada en aquella definiendo así lo que se conoce como Inferencia Contrapositiva a partir de la cual se efectúa la demostración.*

Análisis del Método.

1.- Se parte de la Inferencia del Método Directo dada

por:  $p \rightarrow q$

2.- Según la definición la inferencia utilizada es:  $\sim q \rightarrow \sim p$

3.- Ambas son análogas en el sentido de que su tabla de verdad es idéntica.

4.- No se demuestra que  $q$ ; la tesis, sea verdadera.

5.- Se demuestra que si  $\sim q$  es verdadera entonces  $\sim p$  también lo es.

6.- De lo anterior se infiere que si  $p$  es verdadera entonces  $q$  también lo es según lo dicho en el punto 3.

$p \rightarrow q$ : Si  $A$  es un número Irrracional y  $B$  es un número Racional entonces su suma  $A + B$  es un número irracional.

No obstante que los dos métodos anteriores emplean el mismo razonamiento, en el sentido de que sus ecuaciones proposicionales tienen la misma tabla de verdad, como ya indicamos, en el Método Indirecto NO se demuestra DIRECTAMENTE la veracidad de la Tesis bajo el supuesto de que la hipótesis sea verdadera. Por lo tanto, este método NO tiene el mismo grado de aceptación que el Método Directo, sin embargo, dado que las proposiciones como la del ejemplo NO admiten otra posibilidad de demostración, este Método tiene que emplearse como procedimiento alternativo de demostración. De igual manera existen otras proposiciones que solamente se pueden demostrar mediante el Método conocido como:

7.- La mecánica de la demostración es la misma que para el Método Directo.

EJEMPLO:

Utilizando el Método Indirecto demuestre que:

a).-

$p$ :  $n^2$  es un número PAR.

$q$ :  $n$  es un número PAR.

$p \rightarrow q$ : Si  $n^2$  es PAR, entonces  $n$  también es PAR.

b).-

$p$ :  $A$  es un número irracional y  $B$  es un número Racional.

$q$ :  $A + B$  es un número irracional.

#### REDUCCION AL ABSURDO (CONTRADICCION)

*Este Método consiste en construir una cadena de Inferencias Lógicas tomando como hipótesis de partida la negación de la tesis, y en el proceso llegamos a una proposición que se contradice con el hipótesis o con alguna otra proposición intermedia cuya veracidad ya ha sido demostrada.*

Análisis del Método:

1.- La semejanza con los anteriores es que también es la construcción de una cadena de inferencias lógicas.

2.- Sin embargo, NO se demuestra la veracidad de la Tesis supuesta la veracidad de la Hipótesis.

3.- Tampoco se infiere la veracidad de la Tesis después de demostrar la veracidad de la negación de la Hipótesis bajo el supuesto de la veracidad de la negación de la Tesis.

4.- El Método parte de negando la tesis construir la cadena de inferencias lógicas.

5.- En el proceso se llega a una proposición que se contradice con la Hipótesis de partida o con alguna otra proposición cuya veracidad ya ha sido demostrado.

6.- De aquí se infiere que la negación de la tesis NO puede ser verdadera, es decir, debe ser falsa.

7.- Por lo tanto, la Tesis no negada debe ser verdadera.

8.- La cadena de inferencias lógicas se detiene cuando surge la contradicción y entonces obtenemos las conclusiones.

EJEMPLO.-

Utilizando el Método de Reducción al Absurdo demuestre que "La Raíz de 2 es un número irracional".

Existen proposiciones que en su enunciado contiene diversas alternativas, como aquellas que se definen en el campo de los números reales como por ejemplo:

$p$ : La derivada  $f'(x)$  de una función  $f(x)$  valuada en un punto crítico es cero.

Al pretender demostrar la veracidad de esta proposición debemos de demostrar que las proposiciones alternas:

$p_1$ : La derivada  $f'(x)$  de una función  $f(x)$  valuada en un punto crítico es negativa.

$p_2$ : La derivada  $f'(x)$  de una función  $f(x)$  valuada en un punto crítico es positiva.

son falsas. En estos casos, se emplea lo que se conoce como Método de:

#### DISYUNCION DE CASOS.

*Consiste básicamente en emplear alguno de los métodos anteriores para cada una de las alternativas que puede adoptar muestra proposición a demostrar.*

EJEMPLO:

Demuestre la proposición anterior empleando una Doble Reducción al absurdo.

Finalmente, en Matemáticas se presentan un serie de proposiciones cuya validez está restringida a los elementos de un conjunto previamente definido. Por ejemplo, sean las proposiciones:

$p_1$ : La Suma de los primeros "n" naturales está dada por:  $(n)(n+1)/2$ .

$p_2$ : La suma de los primero "n" impares esa dada por  $n^2$ .

Las proposiciones son evidentes y están enunciadas (Son válidas) en el conjunto de los naturales o en algún subconjunto de ellos.

Ahora que si el conjunto de validez es finito, demostrar la veracidad de la proposición se obtiene mediante verificación directa, por ejemplo, si decimos que:

$p_3$ : La suma de los primeros 50 naturales es 1,275.

Para comprobar su veracidad basta con efectuar la suma.

Empero, si el conjunto es infinito, tal verificación por validación directa además de no poderse efectuar, carece de sentido, por lo tanto se plantea la pregunta: ¿Cómo podemos demostrar este la veracidad de este tipo de proposiciones?. La respuesta a tal pregunta es que tal demostración se efectúa mediante el:

#### METODO DE INDUCCION MATEMATICA.

*Sea  $p(x)$  una proposición definida en algún conjunto bien ordenado B.*

*1. Si tal proposición se cumple para el primer elemento. y*

*2. Si suponiendo que tal proposición se cumple para el elemento "k"*

*3. Podemos demostrar que se cumple para el elemento "k+1"*

*Entonces, tal proposición se cumple para todo elemento k del conjunto B.*

Análisis de la definición:

1.- La proposición se enuncia en un conjunto B Bien Ordenado, que es aquel que:

a).- Tiene un primer elemento bien identificado.

b).- A todo elemento k de B le sigue uno y solo un elemento k+1 bien identificable.

2.- La proposición se VALIDA directamente sobre el primer elemento. Es decir, se verifica que el primero elemento de B la satisfaga.

3.- Se supone que tal proposición la satisface el elemento  $k \in B$  arbitrario. Por hipótesis esta suposición SIEMPRE es verdadera.

4.- Si utilizando la hipótesis anterior podemos demostrar que el siguiente elemento k+1 de B satisface la proposición, entonces:

5.- Se infiere que la proposición es válida para todo elemento de B.

#### EJERCICIOS.

1. OBTÉN LA TABLA DE VERDAD DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES PROPOSICIONALES:

- $(p \wedge q) \vee p' \vee q'$
- $(p \wedge q) \vee p'$
- $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$
- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r') \vee (p' \wedge q' \wedge r')$

2. VERIFICA QUE CADA UNA DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES ES UNA TAUTOLOGÍA.

- $p \Rightarrow p$
- $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
- $p' \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \{[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow q \wedge (p \vee r)\}$

#### EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

1.-) Si la proposición  $((\neg p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee \neg p)$  es verdadera y  $VL(r)=0$ , determina  $VL(p)$  y  $VL(q)$

2.-) Consideremos las siguientes proposiciones:

p:  $x=0$  es la única solución de la ecuación  $x^2 + x=0$

q:  $x=0$  es una solución de la ecuación  $x^2 + x=0$

r: La ecuación  $x^2 - 1=0$  tiene solución en el

conjunto de los números reales

Encuentra el valor lógico de las proposiciones:

- i)  $(p \wedge q) \vee r$
- ii)  $p \wedge (q \vee r)$
- iii)  $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim r$
- iv)  $(\sim r) \rightarrow ((\sim p) \wedge q)$

3.-) Si la proposición  $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge p)$  es falsa y  $VL(q)=0$ ; hallar  $VL(p)$  y  $VL(r)$

4.-) Si la proposición  $(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim q \wedge r) \rightarrow s)$  es falsa y  $VL(p)=1$ ; hallar  $VL(q)$ ,  $VL(r)$  y  $VL(s)$

5.-) Usando los datos proporcionados.

i)  $(p \wedge q) = 1$  y  $(q \wedge r) = 0$  encuentra el valor lógico para:

7.-) Un Estudiante del Colegio Santa Cruz de Chicureo quiso ser detective y se pone a investigar un crimen, llegando a comprobar que las siguientes anotaciones que realizó, son todas verdaderas:

- El mayordomo de la casa o la esposa del difunto, cometieron el asesinato
  - Si el mayordomo cometió el asesinato entonces este no ocurrió antes de la medianoche
  - Si el testimonio de la esposa es verdadero entonces el asesinato ocurrió antes de medianoche
  - Si el testimonio de la esposa es falso entonces la luz de casa no se apagó a medianoche
  - Las luces de casa se apagaron a la medianoche y el mayordomo no es millonario
- ¿Cómo determinó quién es el asesino?

$$[(r \vee p) \rightarrow (r \wedge q)]$$

ii)  $(p \rightarrow q) = 0$  y  $(r \wedge p) = 0$  encuentra el valor lógico para:

$$\sim (p \wedge \sim r) \quad \text{y} \quad p \leftrightarrow r$$

iii)  $(\bar{p} \rightarrow q)$  es falsa encuentra el valor lógico para:

$$(p \vee q) \rightarrow q \quad \text{y} \quad (p \wedge q) \rightarrow p$$

iv)  $VL(p) = 1$ ,  $VL(q) = 0$  y  $VL(r) = 1$ ; encuentra el valor lógico para:

$$(p \wedge q) \rightarrow r \quad (p \vee q) \rightarrow \bar{r} \quad (p \wedge r) \leftrightarrow (\bar{q} \wedge p)$$

6.-) Cinco amigos compiten una carrera en la que no hubo empates y cada uno hace su declaración al llegar a la meta. Establecer el orden de llegada si cada uno dijo al menos una verdad en su declaración:

- |           |                                    |
|-----------|------------------------------------|
| Tito:     | Juan llegó primero y yo segundo    |
| Diego:    | Juan llegó segundo y yo cuarto     |
| Pato:     | Santiago llegó quinto y yo tercero |
| Juan:     | Pato llegó primero y yo quinto     |
| Santiago: | Juan llegó tercero y yo cuarto     |